直線束に対する強Lefschetz型定理とその応用

大阪大・教養　榎　一郎

M を n 次元コンパクトケーラー多様体，ω を M のケーラー形式とする．微分形式に ω を外積させる作用を L とかく．L は deRham または Dolbeault コホモロジー群の準同型を引きおこす．古典的な強Lefschetz定理により，

$$L^q : H^{n-q}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+q}(M, \mathbb{C})$$

は同型となる．特にHodge分解により，次は同型：

$$L^q : H^0(M, \Omega^{n-q}) \cong H^q(M, \Omega^n).$$

これをベクトル束係数コホモロジーに拡張することを考える．E を M 上のベクトル束とする．E-係数であっても L は同様に定義され，次が成り立つ：

<u>定理</u> 1. M を n-次元コンパクトケーラー多様体，E を M 上の Griffiths の意味で半正なベクトル束とすると，

$$L^q : H^0(M, \Omega^{n-q}(E)) \longrightarrow H^q(M, \Omega^n(E)),\ q>0$$

は全射になる．

Griffithsの意味で半正であることの定義は，(定理1の証明とともに)後で述べるが，次と同値である：「$\mathbb{P}(E)$ を E の射影化 ($\mathbb{P}(E)_x$ は E_x の line 全体)，F を $\mathbb{P}(E)$ 上のトートロジカル直線束とするとき，$c_1(F)_{\mathbb{R}}$ の実 d-閉 (1, 1)-形式による代表元 φ で，M 上各点で半正定値となるものがある。」

直線束がGriffithsの意味で半正であるとき，単に半正ということにする。前原によっても注意されたように [ ]，Kollárの単射定理 [ ] は半正直線束に対しても成り立つ (Kollárは直線束の適当な巾が大域切断で生成されている場合に示した)：

Kollárの単射定理　M を (n次元) コンパクトケーラー多様体，F を M 上の半正直線束とする。このとき，$s \in H^0(M, F^{\otimes k})$ とテンソル積をとってえられる準同型

$$s \otimes \cdot : H^q(M, \Omega^n(F^{\otimes m})) \to H^q(M, \Omega^n(F^{\otimes(m+k)})), \ m > 0,$$

は，$s \neq 0$ なら単射である。

さて，さまざまな応用のためには，半正直線束のみならず数値的半正 (nef) 直線束にまで拡張しておくことが望ましい。ただしコンパクトケーラー多様体 M 上の直線束 F が数値的半正であるとは次のように定義する：$c_1(F)_{\mathbb{R}}$ が，

Mのケーラー錐の$H^2(M,\mathbb{R})$における閉包に入っていること，すなわち，ωをMのケーラー形式としたとき，任意の$\varepsilon>0$に対し，$c_1(F)_{\mathbb{R}}$の実 d-閉 (1,1)-形式による代表元 φ_ε で，$\varphi_\varepsilon+\varepsilon\omega$ が M の各点で正定値となるものがあること。

もちろん直線束が半正であれば，数値的半正であるが，逆は一般には成り立たない：藤木による反例がある。実は，上の強Lefschetz型定理も消滅定理も数値的半正直線束では一般に成り立たない。この場合も，藤木の例が反例になっていることを後で示す。

応用を2つあげる。Fが数値的半正直線束のとき，

$$\nu(F):=\max\{k \mid c_1(F)_{\mathbb{R}}^k\neq 0 \ \text{in}\ H^{2k}(M,\mathbb{R})\}$$

とおく（$c_1(F)_{\mathbb{R}}=0$ のときは，$\nu(F)=0$ とする）。

<u>定理</u>2　Mをコンパクトケーラー多様体とし，Mの標準束K_MがQ-直線束として$K_M=F+E$と半正直線束Fとeffective divisor Eに分かれているとするとき，

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m^{\nu(F)}}\dim H^0(M, K_M+mF)>0$$

なる，$\kappa(M)=\nu(F)$，すなわち

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m^{\nu(F)}}\dim H^0(M, mK_M)>0$$

となる。

定理 3 M をコンパクトケーラー多様体，$D=\sum_j a_j D_j$ を M 上の(正整数) effective 因子（各 D_j は既約かつ既約）とし，

$$D_0=\sum_{a_j=b} D_j, \quad b=\max_j a_j$$

とおく．$[D]$ が半正であれば，制限写像

$$H^q(M, K_M+mD) \longrightarrow H^q(D_0, K_M+mD), \quad \begin{matrix} q\geq 0 \\ m>0, \end{matrix}$$

は全射．

§. 定理の証明について

M を n 次元コンパクトケーラー多様体，E をその上のベクトル束とする．E のエルミート計量 h と，M のケーラー計量（ケーラー形式と同一視）ω を固定する．E の複素構造とエルミート計量 h から E のエルミート接続 ∇ が定まる．∇ に関する共変外微分を d^∇ とし，その $(1,0)$-成分を ∂_h（または単に ∂）とかく（$(0,1)$-成分は $\bar\partial$）．h の曲率 $R:=(d^\nabla)^2$ は $End(E)$-値の $(1,1)$-形式となる．

h と M のケーラー計量 ω から定まる E-値 p-形式(etc)に対する M 上の L^2-内積を $(\ ,\ )$ とかく．ケーラー形式を外積させる作用素 L の，この内積に関する形式的随伴作用素を Λ，$\partial_h, \bar\partial$ のを，それぞれ，∂_h^*，$\bar\partial^*$ とかく．これらの間には，次の関係式が成立つ：

$$(4)\quad \begin{cases} \partial_h^* L - L\partial_h^* = -\sqrt{-1}\,\bar\partial, & \bar\partial^* L - L\bar\partial^* = \sqrt{-1}\,\partial_h, \\ \partial\Lambda - \Lambda\partial = -\sqrt{-1}\,\bar\partial^*, & \bar\partial\Lambda - \Lambda\bar\partial = \sqrt{-1}\,\partial_h^*. \end{cases}$$

ここで，2つのラプラシアン

$$(5)\quad \begin{aligned} \Box_{\bar\partial} &= \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial, \\ \Box_{\partial_h} &= \partial_h\partial_h^* + \partial_h^*\partial_h \end{aligned}$$

を考えると，上の関係式により，

$$\Box_{\bar\partial} = \Box_{\partial} + \sqrt{-1}(R\Lambda - \Lambda R)$$

が成り立つ．

(E, h) が(Griffithsの意味で)半正であるとは，各 $\xi \in E_x$, $x \in M$, に対し，$h(R\xi, \xi)$ が，半正定値であることである．h をうまく選べば (E, h) が半正になるとき，単に E が半正であるという．

さて $L^q : \{(n-q,0)\text{−形式}\} \longrightarrow \{(n,q)\text{−形式}\}$ は各点ごとに同型になっている．($n = \dim M$)．実際 (n,q)−形式 ξ に対して，$\xi = (1/q!)^2 L^q(\Lambda^q \xi)$ である．したがってベクトル束に対する強Lefschetz型定理は次から従う．

<u>命題</u> 6. (E, h) が半正であるとき，E−値 (n,q)−形式 ξ に対し，

$$\Box_{\bar\partial}\xi = 0 \iff \begin{cases} \bar\partial\Lambda^q\xi = 0 \quad \text{i.e.,}\ \Lambda^q\xi \in H^0(M, \Omega^{n-q}(E)) \\ R\Lambda\xi = 0. \end{cases}$$

命題6の証明　ξは(n,q)-形式なので、$\partial_h\xi=0$ かつ $R\xi=0$ である。(5)により、

$$\|\bar\partial\xi\|^2+\|\bar\partial^*\xi\|^2=(\Box_{\bar\partial}\xi,\xi)=\|\partial_h^*\xi\|^2+(\sqrt{-1}R\Lambda\xi,\xi).$$

また(4)と $\xi=(1/q!)^2L^q\Lambda^q\xi$ により、

$$(q!)^2\partial_h^*\xi=-\sqrt{-1}\,q\,L^{q-1}\bar\partial\Lambda^q\xi-\sqrt{-1}\,L^q\Lambda\bar\partial\Lambda^q\xi.$$

(⇐) $\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ かつ $R\Lambda\xi=0$ なら上の2つから、ただちに $\bar\partial\xi=0$ かつ $\bar\partial^*\xi=0$ すなわち $\Box_{\bar\partial}\xi=0$ となる。

(⇒) (E,h)が半正なので、

$$\sqrt{-1}(R\Lambda\xi,\xi)\geq 0\quad(\text{"}=0\text{"}\Leftrightarrow R\Lambda\xi=0)$$

となる。したがって $R\Lambda\xi=0$。また $\bar\partial\xi=0$ により、$L^q\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ すなわち $\Lambda\bar\partial\Lambda^q\xi=0$。再び上の2つを用いて、$\partial_h^*\xi=0$, $\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ を得る。■

Kollárの単射定理も命題6から従う。実は、ξが$F^{\otimes m}$-値調和(n,q)-形式であれば、命題6により、$s\otimes\xi$も調和形式になる。実際、命題6により、$\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ かつ $R\Lambda\xi=0$。$\bar\partial s=0$ なので、$\bar\partial\Lambda^q s\otimes\xi=s\otimes\bar\partial\Lambda^q\xi=0$。$F^{\otimes(m+k)}$の曲率$R'$は $(m+k)/m\cdot R$（Fの計量をhとし、$F^{\otimes m}$, $F^{\otimes(m+k)}$の計量は$h^{\otimes m}$, $h^{\otimes(m+k)}$を考える）であるから、

$$R'\Lambda(s\otimes\xi)=s\otimes\frac{m+k}{m}R\Lambda\xi=0.$$

定理2の証明には、次が用いられる:

<u>命題</u> 7　M を n 次元コンパクトケーラー多様体、ω を M のケーラー形式とする。TM を M の正則接束とし、$E=(TM)^{\otimes m}$ とおく。M の標準束 K_M が $\mathbb{Q}$-直線束として、$K_M=$(数値的半正直線束)$+$(effective divisor) と分解しているとき、任意の連接部分層 $\mathcal{S}\subset\mathcal{O}(E)$, $\mathrm{rk}\,\mathcal{S}>0$, に対し、

$$\int_M c_1(\mathcal{S})\wedge\omega^{n-1}\leqq 0$$

となる。

定理3の証明について。定理1、Kollárの単射定理において、"半正直線束"を次のような条件に弱めることができる。

(*) "直線束 F が、$\mathbb{R}$-直線束として $F=F_0+D$ と分解する、ただし F_0 は半正直線束、D は積分可能な effective divisor"

ここで effective divisor $D=\sum a_j D_j$ (D_j は被約かつ既約) が<u>積分可能</u>であるとは、D_j の局所定義函数を f_j としたとき、$1/\prod_j |f_j|^{2a_j}$ が積分可能であること。

さて $F=F_0+D$ が上の条件(*)をみたしていて、(F_0,h_0) が半正であるとする。h_0 を無理やり F の計量とみなすと、これは、D に沿って丁度増大度が、$1/\prod_j |f_j|^{2a_j}$ となる極

をもつことになる。しかし、これは積分可能であるため、L^2-理論は、あたかも D がないかのように成り立つ。したがって定理1，Kollárの単射定理もそのまま成り立つ。

特に $\mathbb{Q}$-effective divisor $D = \sum a_j D_j$ が半正のとき、そのくり上げ $\lceil D \rceil$ は (オ) をみたしている。定理3のように $b = \max_j a_j$, $D_b = \sum_{a_j = b} D_j$ とおくと、$D - D_b = \lceil (1 - \frac{1}{b}) D \rceil$ であるから、定理3が成り立つ。

§. 反例

C を楕円曲線とする。$H^1(C, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}$ なので、C 上の rk 2 ベクトル束 E で、$0 \to \mathcal{O}_C \to E \to \mathcal{O}_C \to 0$ (完全), $E \not\cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ となるものがある。$S = \mathbb{P}(E)$ とおき、$\mathcal{O}(1)$ の定める無限遠切断を Γ とおく。すると、$K_S = -2\Gamma$ で $[\Gamma]$ は数値的半正である。次が容易に示せ、定理1，単射定理の数値的半正直線束に対する一般化の反例となっている；

<u>命題</u> 8 a) $L : H^0(S, \Omega^1(m\Gamma)) \to H^1(S, \Omega^2(m\Gamma))$ は自明（すなわち $=0$）$(m \geq 3)$

b) $s \in H^0(S, \Gamma)$ を定義切断とするとき、

$s \otimes \cdot : H^1(S, m\Gamma) \to H^1(S, (m+1)\Gamma)$ は自明（すなわち $=0$）$(m \geq 1)$